GEOMETRÍA DINÁMICA PARA EL AULA

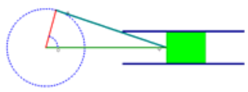
José Antonio Mora Sánchez.

IES San Blas. Alicante

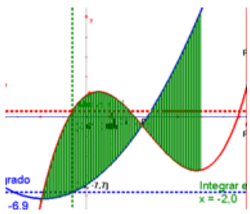
Resumen

La página de Internet Geometría con Cabri presenta algunas posibilidades de la geometría dinámica para acercar a los estudiantes de secundaria contenidos geométricos de todas las épocas. Se han abordado cinco temas:

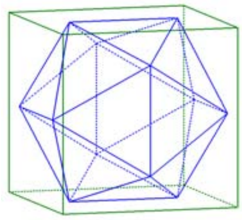
1. Construcción de diseños que simulan mecanismos de la tecnología: el gato elevador, el motor de la máquina de vapor o la excavadora. Desde la mirada del matemático se extraen las formas geométricas que intervienen y las interacciones entre los distintos elementos.



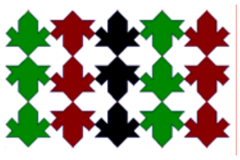
2. Geometría de coordenadas. Se utiliza el Cabri para facilitar el estudio cualitativo de las funciones y sus características, especialmente la relación entre la forma de la función y su expresión algebraica.



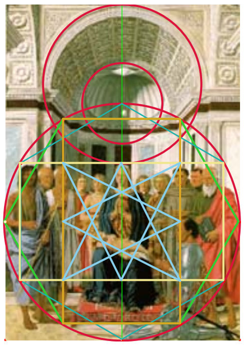
3. La geometría dinámica para diseñar poliedros en movimiento. Se han diseñado una colección de poliedros en movimiento dentro de un proyecto en el que se mezcla la tarea manipulativa de construcción de poliedros con barras y anclajes con el análisis de esos mismos poliedros en movimiento diseñados con Cabri



4. La utilización de Cabri para apoyar una investigación en la clase de Geometría de Secundaria. A partir de un sencillo enunciado que todos los alumnos de la clase puedan abordar se proponen varias vías de trabajo que desembocan tanto en estudios geométricos o algebraicos como en los mosaicos o el arte.



5. La observación una obra de arte percibimos la utilización de ciertas formas geométricas y una composición e forma de colección de relaciones entre los elementos que componen la obra..



ABSTRACT: DYNAMIC GEOMETRY IN THE CLASSROOM

The web page *Geometría con Cabri* shows some of the possibilities the dynamic geometry uses so as to help secondary education students to approach the geometric contents from all times. Five subjects have been tackled:

1. Construction of designs simulating mechanisms of technology.
2. Qualitative study of the functions.
3. Simulation of the movement of the polyhedrons in space.
4. Developement of an investigation carried out in the class of Geometry in the Secondary Education.
5. Geometrical analysis of works of art.

Los programas de geometría dinámica han abierto nuevas posibilidades para la geometría escolar. La principal ventaja frente a otros recursos (libro, pizarra, lápiz y papel) que las figuras dejan de ser estáticas y del plano saltan a la pantalla del ordenador para presentarse en forma de animaciones que nos permiten observarlas desde distintos puntos de vista. Pero no es sólo el movimiento de las figuras lo que les proporciona interés para el aprendizaje de las matemáticas, lo realmente innovador es que los diseños pueden ser concebidos para que podemos modificar ciertos parámetros en la construcción y comprobar los efectos de nuestros cambios. Otras carácteristicas interesantes de los programas de Geometría Dinámica son:

- Admiten el trabajo con ejes coordenados, lo que le hace una herramienta muy poderosa para el estudio de la geometría analítica en el plano y el estudio del comportamiento de las funciones.
- Podemos preparar menús personalizados, con esto graduamos la dificultad de una tarea limitando las herramientas disponibles para realizarla.
- Por la forma de trabajar, se establece muy claramente la diferencia entre "construir" y "dibujar". Podemos *dibujar* un cuadrado situando cuatro vértices en el lugar correcto sin que haya relaciones entre ellos o podemos *construir* un cuadrado mediante perpendiculares y con la ayuda de un compás como lo hariamos sobre el papel para conseguir que los lados sean iguales y los ángulos rectos. El primer cuadrado *dibujado* dejará de serlo en cuanto mueva uno de sus vértices, mientras que el segundo que ha sido *construido* se desplazará, se hará más grande o más pequeño pero mantendrá las características propias del cuadrado (perpendicularidad e igualdad de medidas). Pascal Dewaele muestra un ejemplo muy gráfico de esta situación en http://users.skynet.be/cabri/cabri/Preambul.htm#construire en él concluye que dibujar es reproducir la imagen mental que tenemos de una figura mientras que construir consiste en utilizar las propiedades de la figura para obtener su representación.
- Disponemos de herramientas para cambiar las condiciones establecidas para un determinado elemento. Podíamos pensar que un punto se encontraba sobre un segmento y más tarde darnos cuenta de que el lugar donde debe encontrarse es sobre una curva.

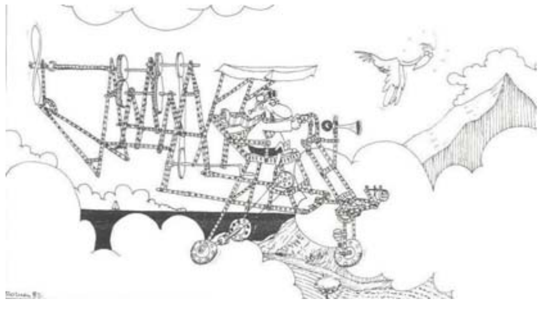
- El programa aprende con nosotros con la producción de macros o procedimientos generales que permiten obtener una figura compleja a partir de unos elementos iniciales prefijados.
- Incluye los procedimientos clásicos de la geometría como la construcción de lugares geométricos o la posibilidad de transferir medidas de un lugar a otro y de un objeto a otro.

Podemos considerar a Cabri Géomètre como un Gran Juego de la Geometría no sólo para el matemático profesional sino también para el alumno que se inicia.

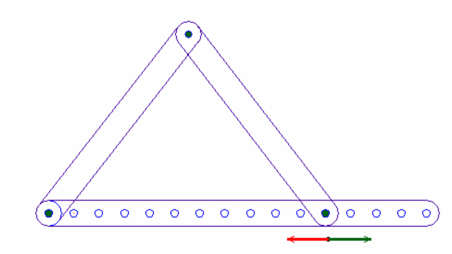
- El aprendiz encuentra un entorno “amigable”. Inicialmente sólo controla unas pocas herramientas que irá ampliando con la exploración y la resolución de problemas.
- El profesor puede diseñar applets dinámicos en Cabrijava -o tomarlos de Internet-, que ayuden a sus alumnos a comprender los conceptos geométricos y las relaciones entre ellos.
- Para el usuario avanzado la principal característica de Cabri es su gran versatilidad: es capaz de adaptarse a la representación y análisis de situaciones muy diversas: el trazado de curvas mecánicas en ingeniería, el estudio de la óptica en física, la simulación de mecanismos de la tecnología, la creación de motivos para la decoración, el análisis de obras de arte o el estudio de la geometría en la naturaleza. En este sentido Cabri entra en el espíritu mismo de las matemáticas al facilitar la modelización de situaciones.
- Para el resolutor de problemas Cabri tiene grandes posibilidades en la exploración de situaciones. Desde un punto de vista numérico medimos distancias, ángulos y áreas para hacer la comprobación in situ de conjeturas, pero también nos podemos colocar desde una perspectiva geométrica para observar la relación entre las los objetos de una construcción y sus propiedades lo que facilitará la adopción de nuevas estrategias de resolución.

La posibilidad de convertir los diseños de geometría dinámica en applets java es la que ha hecho que estas situaciones sean conocidas por un público más amplio y tengamos la posibilidad de utilizarlas en clase sin necesidad de disponer del programa ni saber utilizarlo.

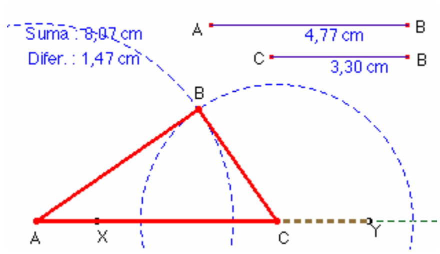
1. Mecanismos. Las matemáticas en la tecnología



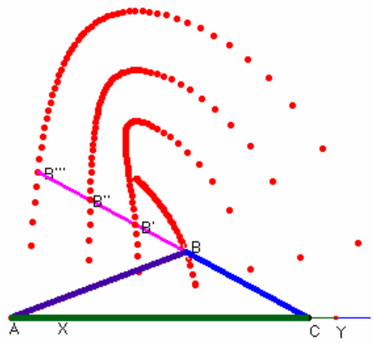
La construcción de mecanismos con el programa Cabri es una tarea gratificante en la que intervienen conceptos y técnicas de geometría elemental y la observación de los objetos que la tecnología utiliza para transformar un determinado movimiento en otro. En general, la idea básica que subyace en un mecanismo es la conversión del movimiento en un punto que llamaremos impulsor (podría ser un punto que gira sobre una circunferencia) en otro que llamaremos seguidor (un movimiento de vaivén). En la vida real esto se consigue mediante ruedas, bielas y articulaciones. El análisis de estos objetos desde el punto de vista geométrico se centra en la comprensión global del funcionamiento de cada mecanismo: las relaciones entre las piezas y la interacción entre ellas para conseguir el efecto deseado. Los diseños están basados en los trabajos de Brian Bolt, especialmente en su libro Matemáquinas (1992) y en la amplia colección de mecanismos de Artobolevski (1970).



Las construcciones geométricas admiten multitud de enfoques y grados de aproximación. Cuando queremos construir un triángulo articulado con dos varillas de longitud fija y una tercera que se pueda alargar o acortar, podemos hacerla con tiras de cartulina, en este casonuestra preocupación será estudiar la forma de hacer las uniones (pueden valer los encuadernadores) o la forma de conseguir que una de las varillas sea extensible.

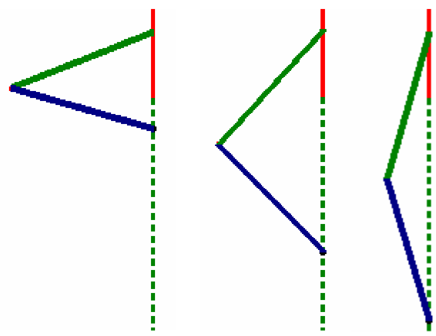


En geometría dinámica las varillas de longitud fija pueden venir dadas por segmentos y el lado variable por un punto que se desplaza a lo largo de una recta. Al cabo del rato nos daremoscuenta de que se mueve entre dos límites (la suma y la diferencia de esos segmentos).



El triángulo anterior es la base de gato elevador. Hemos creado un mecanismo que, cuando realizamos pequeños alargamientos o acortamientos que modifican la base verde del triángulo, los transforma en desplazamientos hacia arriba y abajo siguiendo trayectorias que se describen en el dibujo de la derecha.

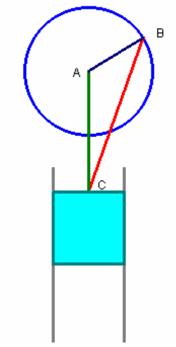
Lo interesante de esta forma de trabajar es que con muy pocos cambios podemos convertir este mecanismo en otro aparentemente muy distinto: en una puerta levadiza como las que sirven para abrir los garajes.

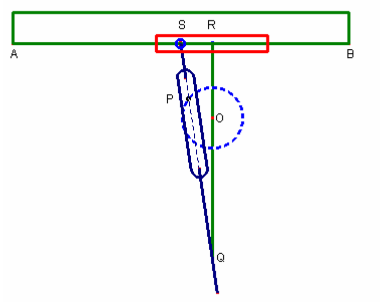


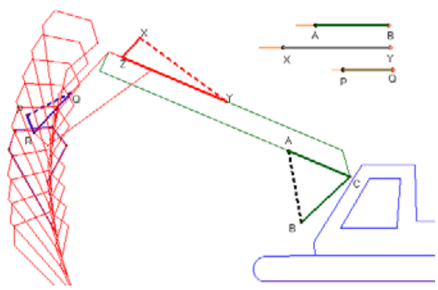
Para transformar el elevador en una puerta levadiza hacemos que la base variable del elevador se incline hasta la verticalidad, los lados de longitud fija serán las hojas plegables de la puerta que harán que ésta se eleve para abrirse (base pequeña) o descienda para cerrarse (base máxima).

Ahora podemos volver a la posición horizontal y comprobar que el triángulo de base variable es el mismo mecanismo que se utiliza para inclinar el respaldo en la hamaca.

También podemos utilizar otros tipos de triángulos para conseguir transformar un movimiento en otro. Tenemos algunos ejemplos en el movimiento del pistón dentro del cilindro en el motor de la máquina de vapor, en la limadora (transformación de un movimiento circular en otro de vaivén) y también en la utilización del cilindro hidráulico de la excavadora en el que el alargamiento de unos segmentos modifican la inclinación de sus brazos.





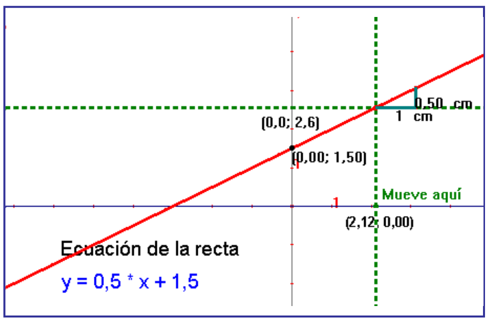


2. Geometría de Coordenadas.

En esta sección se presenta una colección de archivos realizados con el programa Cabri Géomètre II en los que se utilizan las posibilidades de la geometría dinámica para el tratamiento de coordenadas y funciones con el fin de acercar a los estudiantes algunos conceptos de Análisis de Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

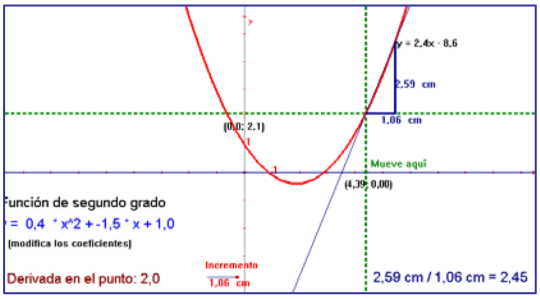
Los diseños realizados son interactivos: están diseñados para que los coeficientes de la expresión algebraica sean modificados y podamos observar los cambios producidos en su gráfica para extraer conclusiones para favorecer un acercamiento intuitivo al estudio de funciones. En el enfoque propuesto interviene tanto el estudio global del comportamiento de diversos tipos de funciones, como un análisis más detallado de sus características. Además, permite un acercamiento a conceptos clave en las matemáticas del bachillerato como son el límite de funciones, la derivada o la integral.

El trabajo se inicia con la el estudio de expresión explícita de la función lineal y =ax+b en la que a es la pendiente y b es la ordenada en el origen. La construcción está preparada para que sea posible introducir cambios en estos dos parámetros y, con ellos, modificar la gráfica dibujada para que los estudiantes puedan comprobar el efecto de las variaciones que



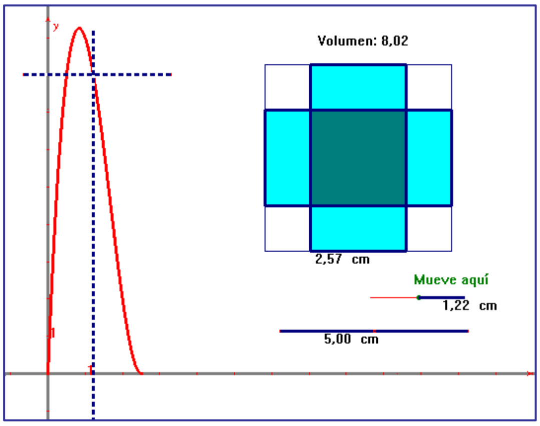
introduzcamos. Comprobamos que los cambios en el coeficiente de x modifican la inclinación de la recta a la vez que el programa calcula que ese valor es exactamente el incremento de la y cuando la x aumenta 1. Por otra parte, al aumentar o disminuir el término independiente obtenemos rectas paralelas que cortan al eje de ordenadas en un punto cuya ordenada es este número. Con todo esto podemos establecer conexiones entre los distintos conceptos relacionados al estudiar la función lineal.

De la misma forma podemos estudiar funciones cuadráticas, cúbicas, polinómicas de cualquier grado, exponencial, logarítmica o trigonométrica o logística y se han preparado archivos con todas estas funciones para poder ser utilizados en clase.



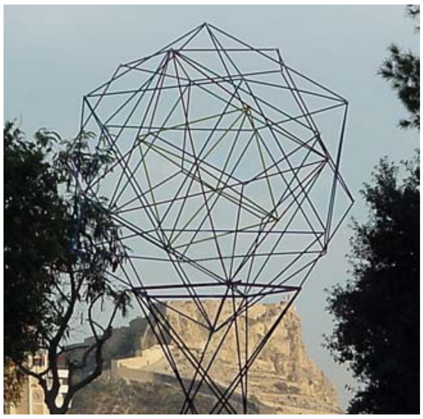
Cabri puede aportar significado geométrico al concepto de derivada. Dada una función de las estudiadas anteriormente, por ejemplo la cuadrática, podemos tomar un segmento de longitud variable que indique el incremento que tomamos en la variable independiente a partir de un punto cualquiera, dibujar el incremento medido sobre la ordenada y trazar la recta secante. Para que se dibuje la tangente no tenemos más que hacer que el incremento se haga todo lo pequeño que podamos.

Cabri permite aportar nuevas perspectivas a problemas que tradicionalmente pertenecen a la órbita del cálculo de derivadas en situaciones de optimización. Los diseños de ordenador pueden ser utilizados por el profesor de Secundaria para sugerir ideas a los estudiantes. Es el caso del problema clásico de las láminas de cartón a las que recortamos cuadrados en los vértices y después doblamos para construir cajas sin tapa. En la figura de la derecha podemos imprimir animación a un punto sobre el segmento pequeño que determina el tamaño del cuadrado que se recorta, se construye la forma recortada de la lámina de cartón (el desarrollo plano de la caja) y se transfieren a un sistema de ejes de coordenadas el valor del lado del cuadrado (abscisa) y el volumen de la caja resultante (ordenada). Aquí podremos estudiar el máximo relativo sin necesidad de esperar al cálculo de derivadas



3. Construcción de un Omnipoliedro para el Tossal de Alicante.

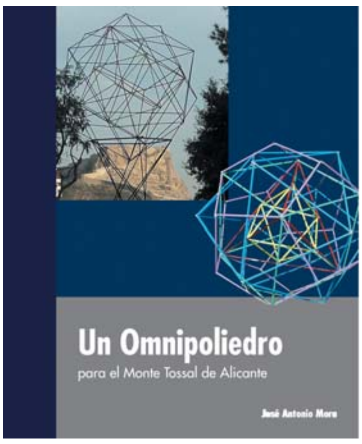
La utilización de Cabri en este caso se ha centrado en la creación de una colección de animaciones que simulan los poliedros regulares enmarcado en un proyecto que se realizó en el 2000 en el contexto de los actos que sirvieron para conmemorar el Año Mundial de las Matemáticas en la ciudad de Alicante y en él participaron los institutos Leonardo da Vinci y Sant Blai de Alicante, la SEMCV Al Khwarizmi y la concejalía de Educación del Ayuntamiento de Alicante.



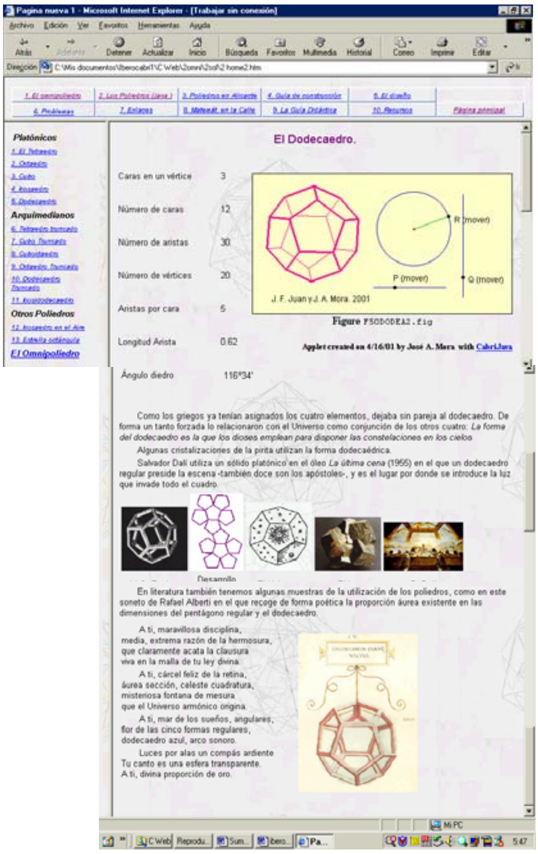
El Omnipoliedro es la composición realizada con los armazones de los cinco sólidos platónicos o poliedros regulares, conocidos y utilizados desde hace más de 4000 años. La estructura se ha realizado de forma que los cinco están inscritos uno dentro de otro. En el interior se ha colocado el Octaedro (amarillo), sus vértices se sitúan en el centro de las aristas del Tetraedro (rojo). Los cuatro vértices del tetraedro coinciden con otros tantos del Cubo (verde). Cada una de las aristas del cubo se encuentra sobre una cara del Dodecaedro (morado). Y por último, el Icosaedro (azul) proporciona rigidez al Dodecaedro ya que las aristas de ambos se cortan en los puntos medios para que los vértices del Icosaedro queden situados en los centros de las caras del dodecaedro y viceversa. De esta forma podemos estudiar las relaciones entre unos y otros, además de conseguir una estructura de gran belleza estética.

La estructura se ha realizado con varillas de aluminio pintadas en los talleres de carrocería del IES Leonardo da Vinci que se engarzan por los extremos con bridas de plástico para formar los vértices de los poliedros. Ësto ha permitido la construcción de una estructura fija de más de 3 metros de diámetro que permanece a modo de escultura en el parque temático del Tossal de Alicante, y que se disponga de otras dos estructuras de unos 2 metros de diámetro que se pueden montar y desmontar en una sesión de trabajo de dos horas.

Con estos dos omnipoliedros “desmontables” se organizó una actividad educativa mediante un convenio que cuenta con la organización de la SEMCV Al Khwarizmi y la financiación a cargo de la Concejalía de Educación del Ayuntamiento de Alicante. La actividad consiste en que los grupos de estudiantes realizan el montaje de la estructura bajo



loa supervisión de un monitor-a que dirige la sesión de trabajo, construyen los cinco poliedros regulares, inscritos uno dentro de otro hasta completar la estructura. Durante el trabajo el monitor aporta información, propone cuestiones, plantea problemas y hace sugerencias para llevar a cabo el objetivo propuesto.

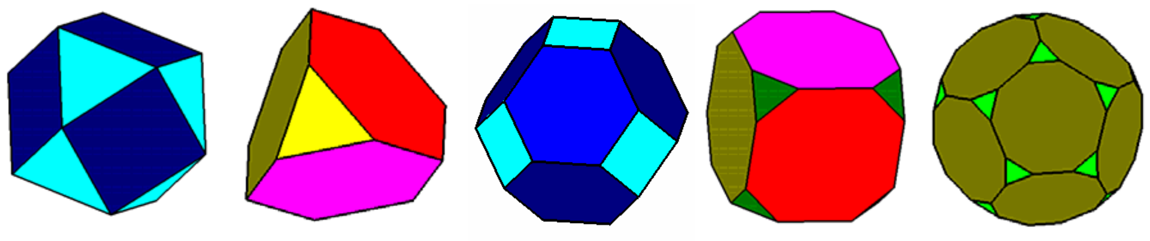


Paralelamente se ha realizado una guía didáctica y una página web que relatan el proceso seguido en el diseño del omnipoliedro y conecta el estudio de los poliedros con otros campos artísticos y científicos y con la utilización que los artistas alicantinos han hecho de ellos.

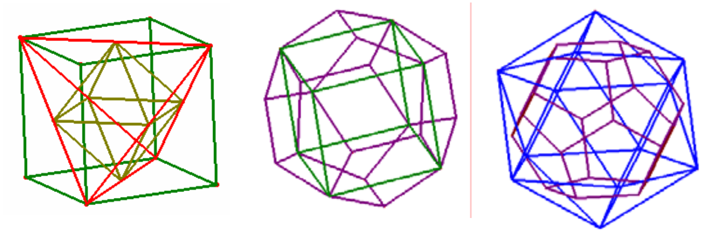
Para ilustrar estas publicaciones se ha realizado una colección de archivos Cabri que simulan el movimiento en 3D de los poliedros según tres ejes de rotación ortogonales. Están basados en los estudios de Fernando Juan para el cubo y, a partir de él se han obtenido el resto de poliedros regulares aprovechando las inclusiones que se van a trabajar y los elementos de simetría comunes. De esta forma el tetraedro se construye con los vértices sobre los del cubo, los vértices del octaedro se diseñan para que vayan a los puntos medios de las aristas del cubo y así sucesivamente hasta obtenerlos todos.

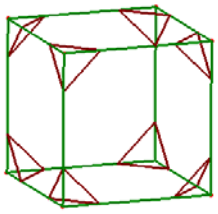
También se ha partido del cubo para realizar los diseños de otros sólidos que se derivan de él como los que surgen al truncar sus vértices. Si tomamos los puntos medios de las aristas del cubo, podremos construir el cuboctaedro, o si hacemos lo mismo dividiendo las aristas del octaedro al truncar los vértices de forma que las aristas queden divididas en tres partes iguales, llegaremos al sólido de Kelvin cuyas caras son hexágonos y cuadrados.

También se han construido las animaciones de los truncamientos del tetradro, del dodecaedro y del icosaedro así como la estrella octángula (composición formada por dos tetraedros invertidos) y el icosaedro en el aire de Buckmister Fuller.

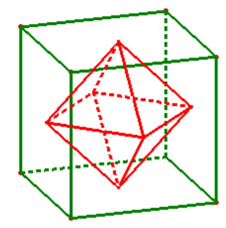


Además de los diseños realizados con las caras sólidas, también se han hecho otros con caras transparentes para ver mejor las inclusiones de unos poliedros en otros para guiar el trabajo de construcción del omnipoliedro.

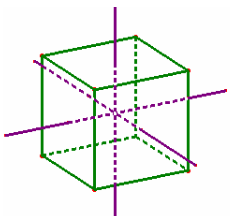




Junto al material informativo se presentan diez problemas para realizar antes, durante o después de la construcción con el fin de que el trabajo de construcción del omnipoliedro se pueda enmarcar dentro del estudio de las matemáticas. Con estas situaciones se pretende el desarrollo de los diferentes contenidos de la geometría del espacio: la medida, el cálculo, el álgebra, la intuición espacial o el apreciar la belleza de las formas.



Para estos problemas se han diseñado animaciones con cabrijava que ilustran las propuestas de trabajo como el truncamiento del cubo (podemos hacer que los triángulos sean más grandes o pequeños) para comprobar la dualidad que permite intercambiar caras por vértices entre el cubo y el octaedro (también entre el icosaedro y el octaedro) o para presentar los ejes de rotación y los planos de simetría del cubo.



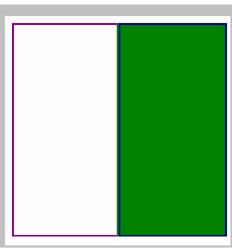
4. La Mitad del Cuadrado. Una investigación en la clase de matemáticas.

La mitad del cuadrado es el título de una investigación en la clase de matemáticas con alumnas y alumnos de 14 años. En principio se realizaba con elapoyo de dibujos con lápiz y papel pero, con la utilización de la geometría dinámica, el trabajo se facilita y se abren nuevas perspectivas para el desarrollo de clase.

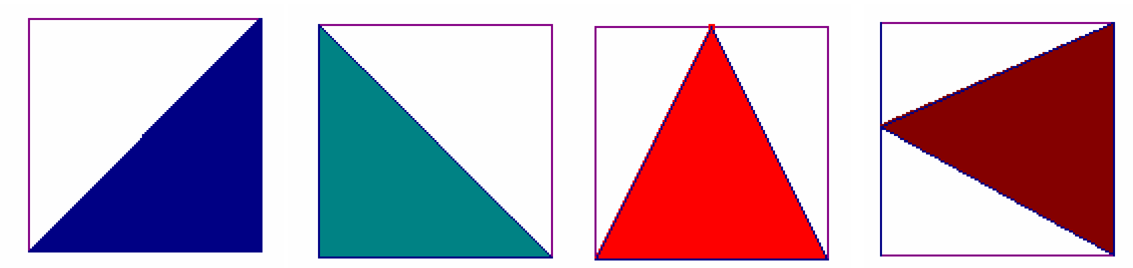
Se parte de un enunciado geométrico muy sencillo para estudiantes de esta edad, es el siguiente:

Dado un cuadrado, una forma de construir, dentro de él, un polígono cuya área sea la mitad, consiste en tomar los puntos medios de dos lados opuestos y unirlos con un segmento.

Investiga otros procedimientos.

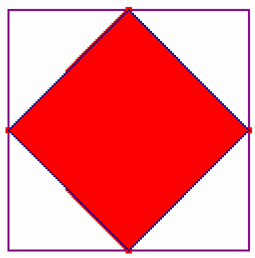


El enunciado no aparenta mayores dificultades, la pregunta es muy abierta para que todos los alumnos puedan abordarla y obtengan soluciones con rapidez que les sumerjan en el trabajo. Muy pronto obtienen algunos procedimientos::



que en muchos casos son repetición de otros anteriores. Este es el momento de recordarles que el enunciado pide obtener nuevos procedimientos.

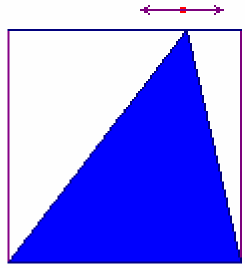
Para dar forma al trabajo exploratorio y provocar la reflexión sobre los procedimientos les podemos pedir a los alumnos que, para cada solución obtenida no basta con el dibujo, han de cumplir tres requisitos:



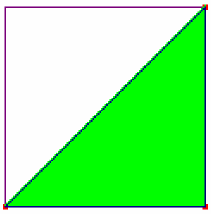
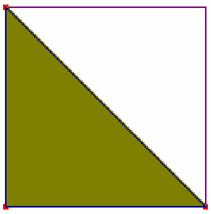
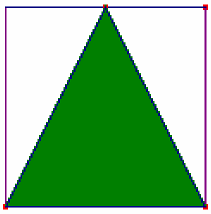
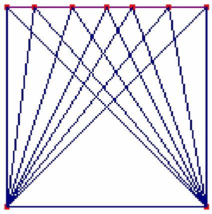
1. Dar el nombre de la figura obtenida. Para ello no basta con echar mano de la memoria fotográfica de las figuras manejadas en cursos anteriores. Es necesario revisar las definiciones para no incurrir en errores. Además, la enseñanza basada en libros de texto hace que muchos reconozcan la figura de la derecha como un rombo por su posición, no como un cuadrado.
2. Describir el proceso seguido para reproducirla. Este relato ha de cumplir ciertas normas de concisión y, sobre todo de correcta utilización de la terminología matemática.
3. Probar que la solución es realmente la mitad del cuadrado, y aquí hay que tener presente cuál es el significado de demostrar para alumnos de estas edades y también que esas demostraciones han de surgir de los conocimientos de los estudiantes, no del profesor.

La actuación del profesor en esta fase es muy importante para romper la dinámica de páginas llenas de dibujos sin ninguna explicación. El objetivo principal es que en clase se debata sobre las ideas geométricas y se reflexione sobre los procedimientos obtenidos.

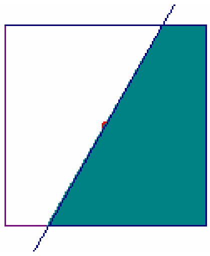
Algunos desarrollos del problema tienen interés algebraico como ocurre cuando, enfrascados en su trabajo, se dan cuenta que para obtener un triángulo no es obligatorio tomar dos vértices contiguos y el centro del lado opuesto a ellos, sino que un punto cualquiera del lado opuesto satisfará la condición exigida por el enunciado. La geometría dinámica puede aportar una ayuda si movemos el punto del lado superior, los estudiantes “verán” que todos esos triángulos tienen la misma área.



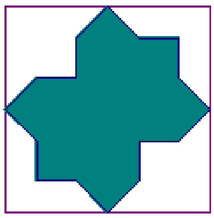
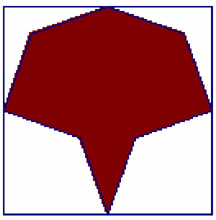
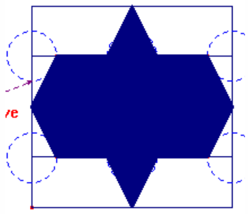
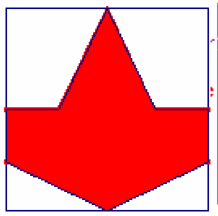
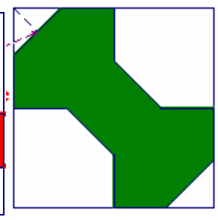
De todas las soluciones barridas por el punto móvil del triángulo de arriba, hay varios que se han obtenido como casos particulares. Podríamos considerar que esta nueva solución: *tomar dos vértices contiguos y un punto en el lado opuesto*, es una solución que generaliza las anteriores.

De la misma forma que con el triángulo, hay otras soluciones que se pueden generalizar. Si tomamos *una línea que pase por el centro del cuadrado*, obtenemos un trapecio. La animación de la recta al girar alrededor del centro genera figuras entre las que se encuentran el primer rectángulo y los dos triángulos rectángulos.



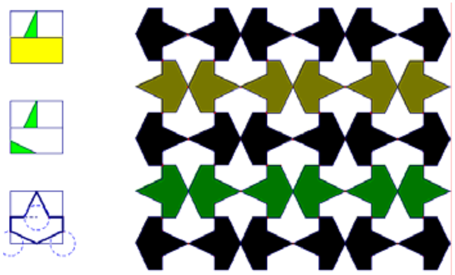
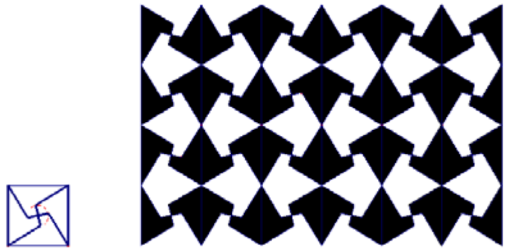
Los alumnos obtienen muchas más soluciones, (ver la página web http://jmora7.com/miWeb8/Mitad/mitad.htm) algunas de ellas estéticamente elegantes:

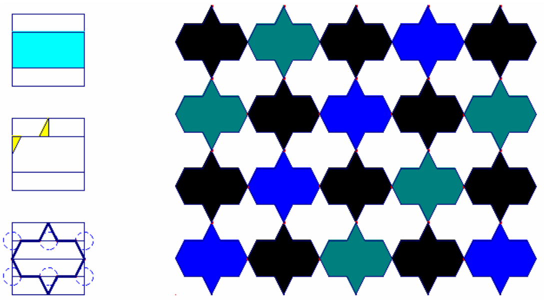
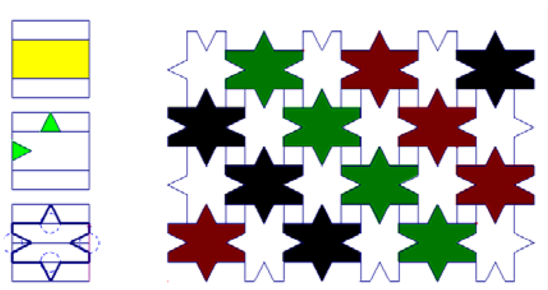
Podemos encontrar muchas de estas formas en los diseños nazaríes de la Alhambra de Granada y esta puede ser una nueva vía para enfocar la investigación, el conseguir baldosas que si conseguimos repetirlas a partir de traslaciones, giros y simetrías, den lugar a mosaicos que recubran el plano.

La Alhambra es el reino del cuadrado, lo encontramos de forma explícita en azulejos que recubren las paredes dispuestos en diferentes combinaciones de colores.

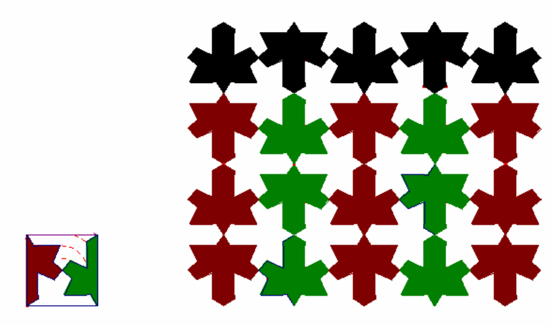
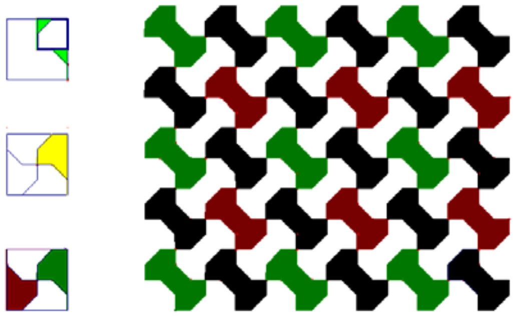
En una de las columnas que rodean al patio de los leones encontramos un mosaico parecido a éste que vemos aquí abajo y que se ha diseñado de dos formas distintas:

Diseños con forma de estrella que también encontramos en una de las primeras salas en la visita a los palacios nazaríes.

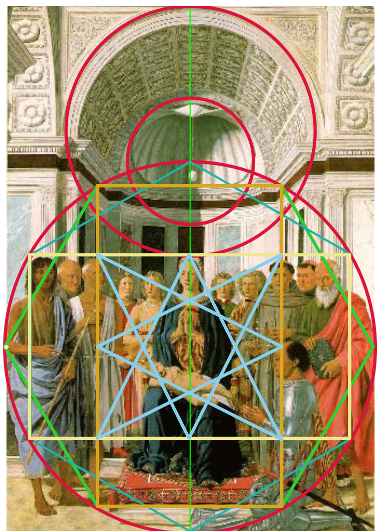
Y también los diseños con forma de hoja y de hueso

A todo este trabajo hay que añadir las posibilidades de la geometría dinámica ya que los diseños de baldosas y mosaicos realizados pueden tener la característica de haber sido diseñados con uno o varios elementos móviles que permiten la transformación de la baldosa original y de todo el mosaico completo con ella.

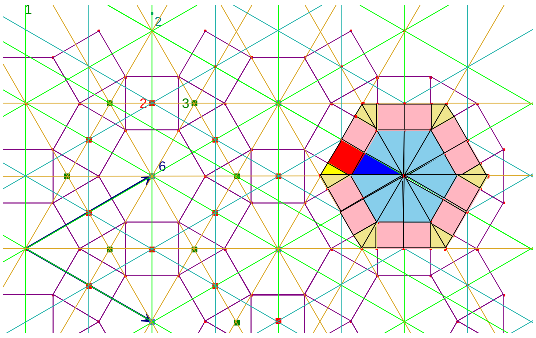
5. Análisis geométrico (y dinámico) de obras de arte

En muchos casos, al observar una obra de arte percibimos la utilización de ciertas formas geométricas y una composición en forma de colección de relaciones entre los elementos que componen la obra. En la imagen de la derecha tenemos el estudio de la obra *Madonna con Niño y Santos* (el cuadro del huevo) de Piero della Francesca.

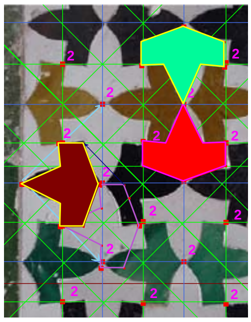


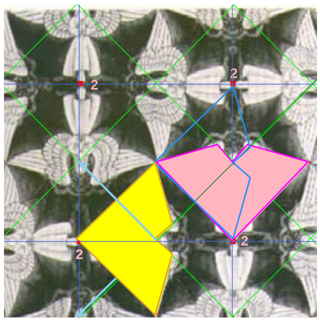
Las mejoras en los programas de geometría dinámica admiten la posibilidad de colocar una imagen en el área de trazado para dibujar sobre ella líneas y puntos, medir distancias, analizar propiedades y relaciones entre los elementos construidos, trazar ejes de simetría y situar centros de rotación de forma que salga a la luz la estructura que, conscientemente o no, el autor de la obra tenía en su mente.

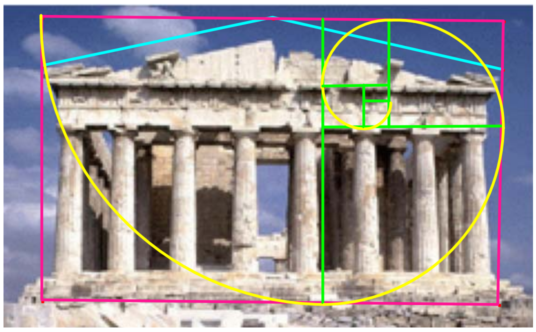
La geometría dinámica también proporciona herramientas para el estudio de los mosaicos. En ellos podemos dibujar los movimientos que dejan invariante la composición hasta llegar al motivo mínimo con el que, a partir de una colección de baldosas como ese motivo, podemos generar el mosaico completo mediante traslaciones, giros y simetrías.



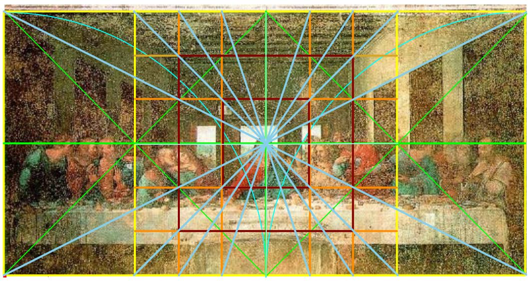
Podemos realizar este mismo trabajo con los mosaicos del grabador holandés M.C. Escher o con los mosaicos de la Alhambra. El punto de partida será distinto al seguido en el apartado anterior, entonces comenzábamos con una baldosa, ahora nos planteamos primeramente el mosaico completo.







Con Cabri podemos *reconstruir* la fachada del Partenón y analizarla a partir de la proporción aúrea. Comprobamos que las distintas secciones van coincidiendo claramente con los elementos arquitectónicos construidos.



Si el objetivo es analizar el tratamiento de la perspectiva acudiremos a obras como *Las meninas* de Velázquez o *La Última Cena* de Leonardo da Vinci.

Conclusiones:

Cada uno de los cuatro temas tratados con el programa Cabri tiene un tratamiento diferenciado en la clase de matemáticas:

- La interacción con los mecanismos construidos pueden utilizarse para apoyar la construcción de figuras geométricas y estudiar las propiedades de los polígonos. El estudio de las trayectorias de ciertos puntos en las articulaciones tiene relación con la idea de lugar geométrico que se usa en la construcción de algunas funciones. Las ideas de proporcionalidad surgen cuando ponemos en contacto ruedas dentadas y discos unidos por correas para la transmisión del movimiento y provocar efectos multiplicadores.

- La geometría de coordenadas persigue el objetivo de que los alumnos comprendan de forma cualitativa las características de las diferentes familias de funciones, estudio que está muy alejado del dibujo de curvas a base de dar valores y situar puntos. Se intenta extraer los aspectos más interesantes de cada función: las zonas donde pasan las cosas importantes, las tendencias, las posibles discontinuidades, etc. La comprensión de las relaciones entre la expresión algebraica y el dibujo de la función es uno de los objetivos importantes de las matemáticas de los últimos cursos de la ESO y del bachillerato. Los diseños se han construido para ayudar al trabajo que se realiza el clase si se puede dedicar algunas sesiones a que los estudiantes manipulen los coeficientes de las expresiones algebraicas y comprueben el efecto que provocan sobre el trazado de la curva.

- La construcción del omnipoliedro para el Tossal intenta dotar a esta actividad educativa de un apoyo visual a través de Internet con una colección de animaciones de los poliedros que facilite el trabajo que después realizará el grupo cuando construyan la estructura con barras y anclajes. Los diseños en movimiento facilitarán el trabajo exploratorio en varios de los problemas propuestos para complementar el trabajo matemático que se propone. Además de la utilidad en la clase de matemáticas, en este caso también cumple un objetivo de divulgar los contenidos de las matemáticas de todas las épocas y civilizaciones representadas aquí en la construcción de los sólidos platónicos.

- En la mitad del cuadrado Cabri se utiliza desde el primer momento en la clase de matemáticas y son los alumnos los que pueden realizar sus propios diseños ya que, con muy pocas herramientas, pueden producir los mismos diseños que realizarían con lápiz y papel y obtener destreza en la creación de diseños que incluyan animaciones y sobre los que se pueda interactuar. También es muy interesante la construcción de celosías con los polígonos obtenidos dentro del cuadrado porque surgen de forma natural las ideas que subyacen en los movimientos en el plano como las isometrías.

- En el análisis de obras de arte, el objetivo es extraer las concepciones geométricas que se encuentran detrás de una obra de arte: un cuadro, un mosaico o un edificio y experimentar con esas ideas para acercarnos a la forma en que las matemáticas pueden contribuir a crear belleza. Para muchos alumnos puede ser una experiencia enriquecedora la conexión de algo tan aparentemente subjetivo como la percepción del arte con unas matemáticas que a veces sólo perciben a través de números y fórmulas.

Un programa de geometría dinámica como Cabri, complementado con Cabrijava para su publicación en Internet es un recurso didáctico muy poderoso en nuestras clases de matemáticas, pero no debe hacernos olvidar otros recursos didácticos tan importantes o más: instrumentos de dibujo, varillas, mecanos, tramas, láminas y acetatos o espejos. Como se señalaba en el Simposio de Valencia: *No es la incorporación de tres o cuatro herramientas espectaculares lo que caracterizará la nueva organización de las clases, sino el uso habitual y cotidiano de una amplia gama de materiales que haga de la clase de matemáticas un laboratorio-taller* .

BIBLIOGRAFÍA

ARTOBOLOEVSKY, I.I. (1979). Mecanismos en la técnica moderna. (6 vol.). Mir: Moscú

BOLT, A. B. y HISCOCKS (1970). Machines, mechanims and mathematics. Mathematics for the Majority Project. Chatto & Windus. The School Council. London.

BOLT, B. (1992). Matemáquinas. La matemática que hay en la tecnología. Labor: Barcelona.

BOULEAU, CHARLES (1996). Tramas. La geometría secreta de los pintores. Akal. Madrid

CAPDEVILA Ed. (1992). Las claves de la pintura. Planeta. Barcelona

COLE, ALISON. (1993). Perspectiva. Ed. Blume. Barcelona

CRAWFORTH, D. (1988). ¿Qué es un cuadrilátero?. (En Walter M. ed. Geometry. M.E.C.: Madrid).

CUNDY, H. M. et ROLLET, A. P. (1978). Modèles mathematiques. CEDIC:Paris

FIELKER, D. (1987) Rompiendo las cadenas de Euclides (MEC: Madrid).

GHYKA, M.C. (1983). Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes. Ed. Poseidón. Barcelona.

LAWLOR, R. (1993) . Geometría sagrada. Ed. del Prado. Madrid

MALINS, F. (1983). Mirar un cuadro. Herman Blume Ediciones. Madrid

MORA, J.A. (1991). La mitad del cuadrado. Revista SUMA, núm. 8. pp. 11-29.

MORA, J.A. (1997). De la calle al ordenador. Revista Aula de Innovación Educativa, núm. 58. Enero de 1997 pp. 20-21.

MORA, J.A. (1997). La Geometría de los mecanismos con Cabri-Géomètre II. Texas Instruments. Madrid.

MORA, J.A. (1998). Matemáticas con Cabri-Géomètre II. Proyecto Sur. Granada.

MORA, J.A. (2001). Un omnipoliedro para el Tossal de Alicante. (Ayuntamiento de Alicante)

O'DAFFER P. Y CLEMENS S. (1977). Geometry: an investigative approach. Addyson-Wesley: California.

PACIOLI, L. (1987). La Divina proporción. Akal. Madrid

PUIG ADAM, P. (1956). Didáctica de la matemática moderna.

RICO, P. y CASTELLS, R. (1999). Colección Arte Siglo XX. Museo de la Asegurada. Alicante.

QUERALT, T. y otros (1998). Estructures Espacials. Tandem. València

RUIZ GARRIDO y PÉREZ GÓMEZ (1987). Visiones matemáticas de la Alhambra. El color. Revista Epsilon, monográfico dedicado a la Alhambra pp. 51-59.

WEYL, H. (1991). Simetría. Ed Mc Graw Hill. Barcelonax

DIRECCIONES DE INTERNET

Geometría con Cabri II de José Manuel Arranz
http://roble.cnice.mecd.es/~jarran2/
Geometría con Cabri de Carmen Arriero e Isabel García
http://platea.cnice.mecd.es/%7Emcarrier/
Geometría con Cabri II de José Antonio Mora
http://jmora7.com/
Página de Ricard Peiró
http://webs.ono.com/usr000/ricardpeiro/
Matemáticas de Antonio Pérez Sanz
http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/index.html
Laboratorio virtual de triángulos con Cabri de Ricardo Barroso
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/
Materiales didácticos para el Aula de ordenadores de Manuel Sada.
http://www.pnte.cfnavarra.es/~iesozizu/departamentos/matematicas/recursos/infos/index.html
Páginas de Cabri de Carlos Fleitas en la web del Departamento de
http://centros5.pntic.mec.es/ies.marques.de.santillana/matem/inddep.htm
MisMates de María Dolores Rodríguez Soalleiro
http://www.mismates.net/
Curso de Cabri Ii del Proyecto Medusa.
http://nti.educa.rcanaria.es/matematicas/Geometria/CURSO_CABRI/INICIO.HTM
Geometría Interactiva de William Rodríguez Chamache
http://www.geometriainteractiva.com/index.asp
El Paraíso de las Matemáticas
http://www.matematicas.net/

Páginas en otros idiomas

Cabrilog
http://www-cabri.imag.fr/
Project Cabrijava.
http://www.cabri.net/cabrijava/index.html
Cabri en las páginas de Texas Instruments.
http://education.ti.com/us/product/apps/cabri.html
Abracadabri de Yves Martin de la Universidad de La Reunión.
http://www.cabri.net/abracadabri
Figures et Macro 3D avec Cabri de Geneviève Tulloue
http://gtulloue.free.fr/Cabri3D/
Cabri en Physique de Yves Cortial.
http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/cortial/bibliohtml/biblgene.html
Cabri Java de J. M. Laugier
http://www.up.univ-mrs.fr/~laugierj/CabriJava/liste.html
Tutoriel sur Cabri de Guy Gervais.
http://www2.csduroy.qc.ca/projetsrecit/ggervais/tutoriel/tutoriel.html
Wilson's conics pages de Wilson Stother.
http://www.maths.gla.ac.uk/%7Ewws/cabripages/conics01.html
http://mathforum.org/dynamic/cabri.links.html
CabriJava Applets en The National Tsing Hua University – Taiwan.
http://poncelet.math.nthu.edu.tw/disk3/cabrijava/index.htm
Página de Paolo Lazarini.
http://users.libero.it/prof.lazzarini/index.htm#start